Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Лекция 2.3

Аннотация

Понятие комплексного числа. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня.

1 Комплексные числа

В современной математике, помимо действительных чисел, используют комплексные числа, потребность в которых возникла в XVI веке в связи с необходимостью определить корень из отрицательного числа, а именно $\sqrt{-1}$ при решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C. Число $\sqrt{-1}$ обозначили буквой i и стали называть **мнимой единицей**: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$, ...

Определение

Комплексным числом z называется выражение вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица. При этом число a называется **действительной частью** числа z и обозначается Rez, а число b – мнимой частью и обозначается Imz.

Если $a = 0$, то комплексное число $z = bi$ называют **чисто мнимым**.

Определение

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **комплексно сопряженными.**

Пример. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$. Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$, $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$. Корни – $x_{1,2} = 1 \pm 2i$ – комплексно сопряженные числа.

Определение

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется **алгебраической формой записи** комплексного числа.

Определение

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Определение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

а **разностью** - комплексное число

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Определение

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Данная формула получается путем обычного арифметического перемножения двух двучленов:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) =$$

$$= a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Определение

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Данная формула получается путем умножения числителя и знаменателя дроби z_1/z_2 на число, сопряженное знаменятелю, $\bar{z}_2$.

Пример. Выполним арифметические действия над комплексными числами $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 2i$:

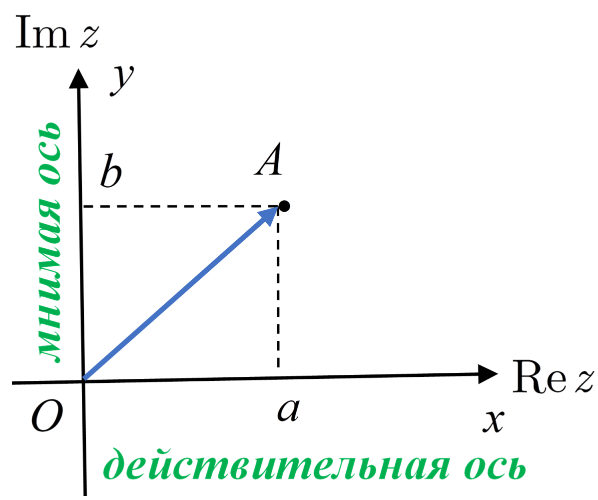
а) $z_1 + z_2 = (1 - i) + (3 + 2i) = (1 + 3) + i(-1 + 2) = 4 + i$;
б) $z_1 - z_2 = (1 - i) - (3 + 2i) = (1 - 3) + i(-1 - 2) = -2 - 3i$;
в) $z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 + 2i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2i - 3i - i \cdot 2i = 5 - i$;
г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 - i}{3 + 2i} = \dfrac{(1 - i) \cdot (3 - 2i)}{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)} = \dfrac{3 - 2i - 3i - 2}{9 - 6i + 6i + 4} = \dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$.

2 Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $A(a, b)$ или ее радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$.

Определение

Точкам, лежащим на оси Ox, соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось Ox называют **действительной осью**.



Определение

Точкам, лежащим на оси Oy, соответствуют чисто мнимые числа $(a = 0)$, поэтому ось Oy называют **мнимой осью**.

Определение

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют **плоскостью комплексной переменной** или **комплексной плоскостью**.

Таким образом, на оси x располагаются действительные числа, а на оси y – чисто мнимые.

Определение

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется модуль вектора, соответствующего этому числу.

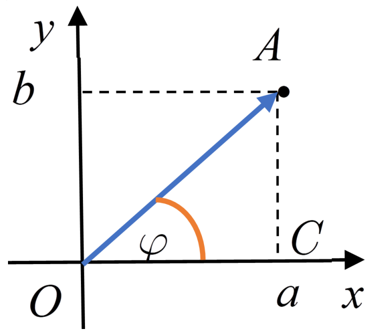
Обозначение: r, $|z|$.

Вычисление: $r = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором, изображающим это число.

Обозначение: φ, Arg$z$.



Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ является многозначной величиной:

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi n \ (n \in Z),$$

где $\arg z$ – **главное значение аргумента**, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Для практических расчетов из множества значений аргумента Arg$z$ в основном выбирают его главное значение $\arg z$, которое определяется по формуле:

$$\arg z = \mathrm{arctg}(b/a) + \pi k,$$

где k выбирается по правилу:
если z находится в 1-ой или 4-ой четвертях комплексной плоскости, то $k = 0$;
если z находится во 2-ой четверти комплексной плоскости, то $k = 1$;
если z находится в 3-ей четверти комплексной плоскости, то $k = -1$.

3 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Из прямоугольного треугольника OCA (см. рисунок выше) находим:

$$a = r\cos\varphi, \ b = r\sin\varphi.$$

Таким образом, комплексное число z можно записать в виде:

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r - модуль комплексного числа z, φ - один из его аргументов.

Определение

Запись в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

Пример. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Для числа z имеем $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(b/a) + \pi k = \operatorname{arctg}((-1)/1) + \pi \cdot 0 = -\pi/4$.

Отсюда $z = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$.

Арифметические действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n - целое положительное число. Это выражение называется **формулой Муавра**.

4 Показательная форма записи комплексного числа

Используя **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

каждое комплексное число можно записать в форме

$$z = re^{i\varphi},$$

которая называется **показательной формой записи** комплексного числа.

Арифметические действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$,

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

5 Корень n-ой степени

Определение

Корнем *n*-ой степени из комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется комплексное число, определяемое равенством

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, ..., n-1.$$

Таким образом, корень n–ой степени из комплексного числа имеет n различных значений для $k = 0, 1, ..., n-1$.

Пример. Найти все корни уравнения $x^3 + 1 = 0$.

Решение.

Необходимо найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Запишем число $z = -1$ в тригонометрической форме:

$a = -1$, $b = 0$, $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\varphi = \pi$.
Отсюда $z = \cos\pi + i\sin\pi$. Тогда

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$k = 0$: $(\sqrt[3]{-1})_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$k = 1$: $(\sqrt[3]{-1})_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

$k = 2$: $(\sqrt[3]{-1})_3 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{-1} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Найденные корни на плоскости: