Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Текст 2.2

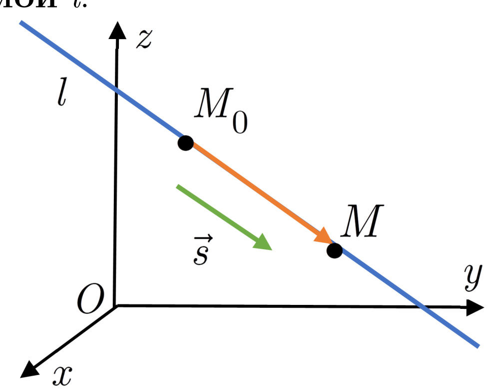
Аннотация

Уравнения прямой в пространстве: общие, канонические, параметрические уравнения прямой и уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Исследование взаимного расположения прямой и плоскости, двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

1 Прямая линия в пространстве

1.1 Канонические уравнения прямой в пространстве

Рассмотрим в пространстве произвольную прямую l. Будем предполагать, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, а ненулевой вектор $\vec{s} = (m, p, q)$ параллелен этой прямой или лежит на ней. Вектор $\vec{s}$ - **направляющий вектор прямой** l.

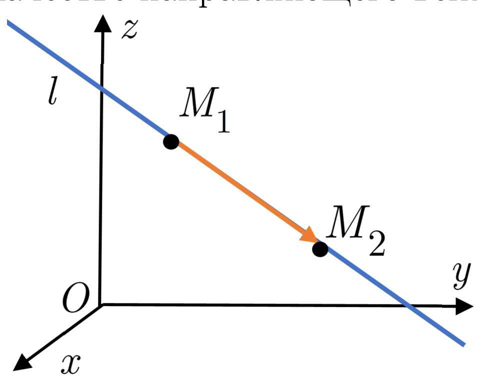


При таких условиях произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\vec{s}$. Отсюда получаем **канонические уравнения прямой в пространстве**:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}. \tag{1}$$

1.2 Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть в пространстве прямая l проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можно взять в качестве направляющего вектора прямой l.



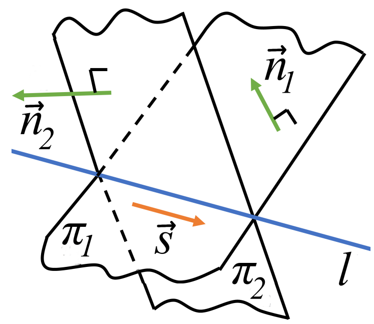
Воспользовавшись уравнениями (1), составим уравнение прямой l, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Получим **уравнения прямой, проходящей через две точки**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2}$$

1.3 Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую l в пространстве можно рассматривать, как линию пересечения двух непараллельных плоскостей, система уравнений которых дает **общие уравнения прямой в пространстве**:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$



Так как прямая l перпендикулярна нормальным векторам $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то за направляющий вектор этой прямой можно взять векторное произведение

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

1.4 Параметрические уравнения прямой в пространстве

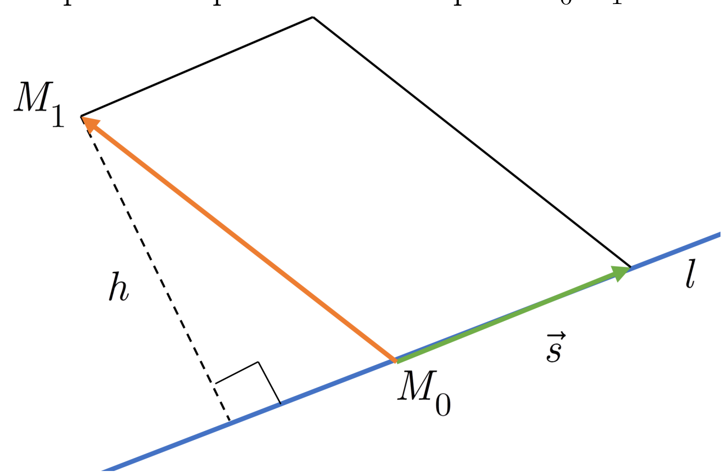
Приравнивая уравнения (1) к некоторому параметру $t \in R$, получим **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = pt + y_0, \\ z = qt + z_0. \end{cases} \tag{4}$$

2 Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l в пространстве задана своими каноническими уравнениями (1), точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, $\vec{s} = (m, p, q)$ - направляющий вектор прямой l. Найдем расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой l.

Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{s}$.



Тогда расстояние от точки M_1 до прямой l будет равно высоте h параллелограмма:

$$d = \frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{s}|} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}. \tag{5}$$

3 Расстояние между двумя прямыми

Если две прямые в пространстве пересекаются или совпадают, то расстояние между ними равно нулю. Поэтому имеет смысл говорить о расстоянии между скрещивающимися или параллельными прямыми.

Пусть в пространстве прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1},\ l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}.$$

Случай 1. Прямые l_1 и l_2 параллельны.

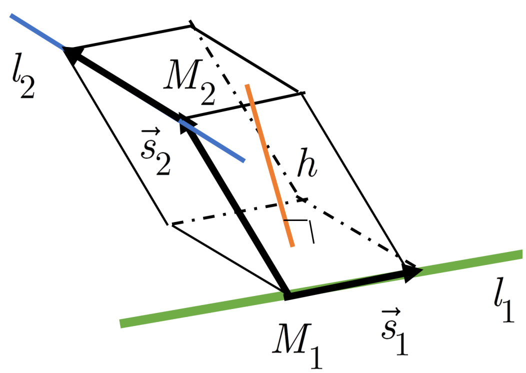
Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 есть расстояние от произвольно выбранной точки прямой l_1 до прямой l_2 и вычисляется по формуле (5).

Случай 2. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

Определение

Скрещивающими называются прямые, которые невозможно поместить в одну плоскость, т.е. они не параллельны и не пересекаются.

Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости единственным образом. Расстояние между скрещивающимися прямыми есть расстояние между этими плоскостями и может быть найдено, как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$.



В результате получаем формулу для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми с помощью смешанного произведения векторов:

$$d = \frac{V_{\text{пар}}}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}. \tag{6}$$

4 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1},\; l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}.$$

Определение

Под **углом между прямыми** l_1 и l_2 будем понимать угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$:

$$\cos(\widehat{l_1\ l_2}) = \cos(\widehat{\vec{s}_1\ \vec{s}_2}) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}. \tag{7}$$

Условие параллельности прямых:

$$l_1 || l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 || \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 = q_1 \cdot q_2 = 0.$$

Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости (т.е. либо пересекаются, либо параллельны), если векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

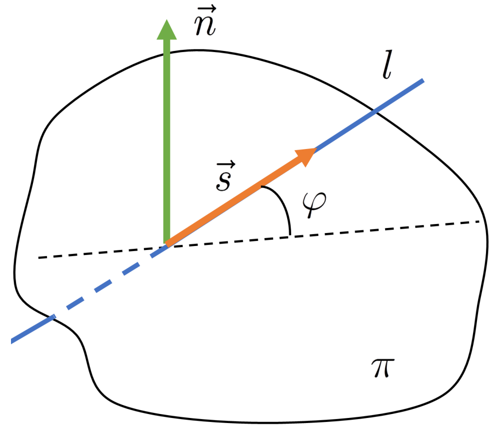
5 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы прямая l своим каноническим уравнением и плоскость π общим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}, \ \pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Определение

Углом φ между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.



Тогда

$$\cos(\widehat{\vec{s}\,\vec{n}}) = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}. \qquad (9)$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$l||\pi \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow Am + Bp + Cq = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$l\perp\pi \Leftrightarrow \vec{s}||\vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{p}{B} = \frac{q}{C}.$$

Для нахождения **точки пересечения** прямой l и плоскости π удобно от канонических уравнений прямой l перейти к параметрическим (4). Подставив эти выражения для x, y и z в общее уравнение плоскости π, найдем значение параметра t, при котором прямая l и плоскость π пересекаются:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bp + Cq}\ .$$

Затем подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l и найдем координаты точки пересечения.

Одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bp + Cq = 0 \end{cases} \tag{10}$$

является **условием принадлежности прямой l плоскости π**.

Если прямая l и плоскость π пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если же они параллельны, то **расстояние от прямой до плоскости** есть расстояние от любой точки прямой до плоскости и может быть найдено по формуле (6).