Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Лекция 2.2

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

По крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу.

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу. В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Если кривая имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных осей, или имеет вершину в начале координат и пр.), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется **каноническим**.

Эллипс

Определение

Эллипсом называется геометрическое место всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Эллипс

Расположим фокусы эллипса F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$.

Расположим фокусы эллипса F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Эллипс

Расположим фокусы эллипса F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса,

Расположим фокусы эллипса F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса, $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ и по определению эллипса $2a > 2c$.

Эллипс

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Эллипс

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Второе слагаемое в левой части равенства перенесем в правую часть и возведем обе части в квадрат.

Эллипс

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Второе слагаемое в левой части равенства перенесем в правую часть и возведем обе части в квадрат. Получим

$$a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx.$$

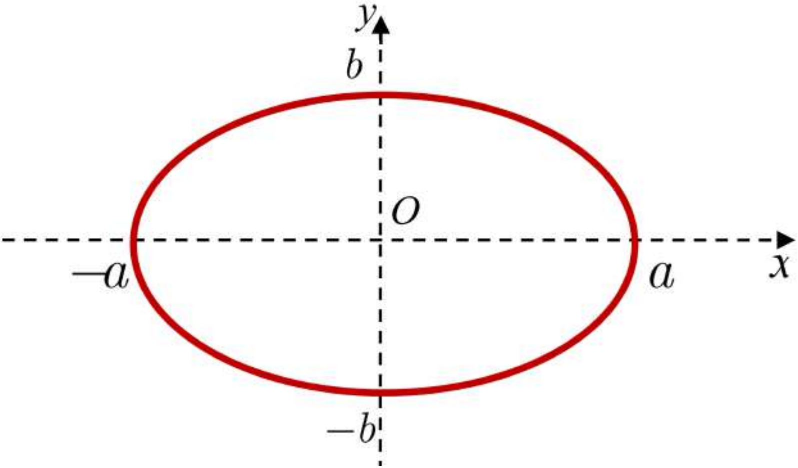
Эллипс

Далее возведем обе части этого равенства в квадрат и разделим полученное равенство на $a^2(a^2 - c^2)$.

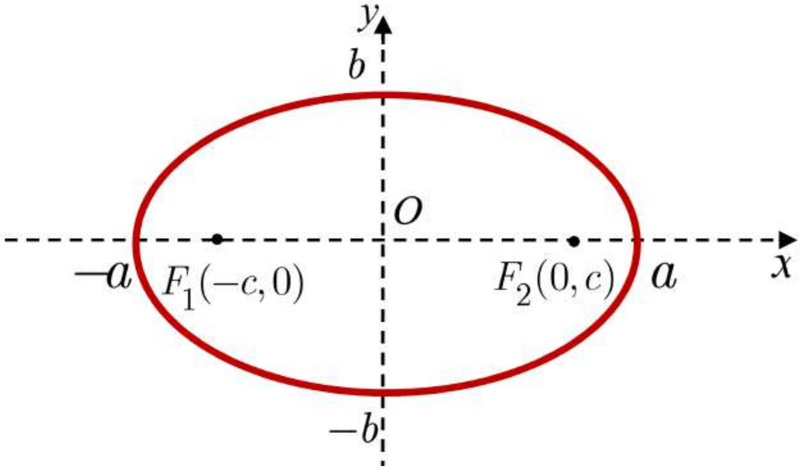
Далее возведем обе части этого равенства в квадрат и разделим полученное равенство на $a^2(a^2 - c^2)$. Полагая $a^2 - c^2 = b^2$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

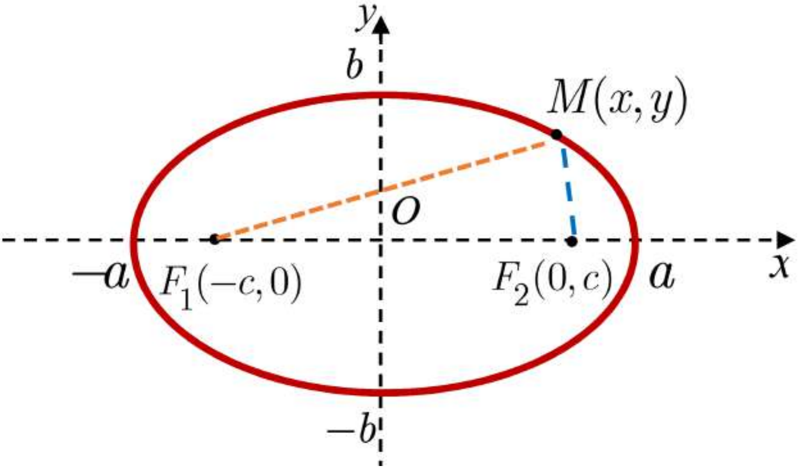
Эллипс

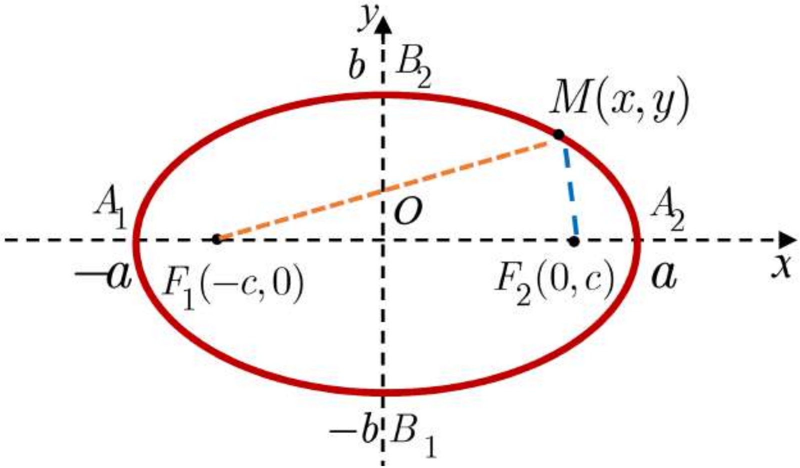


Эллипс

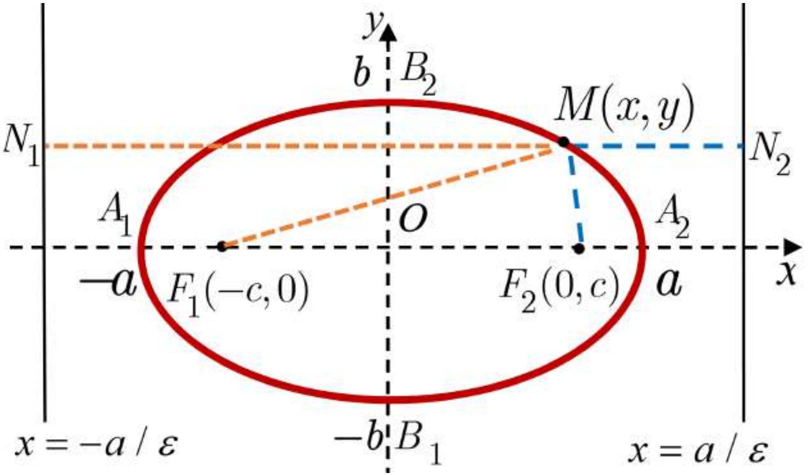


Эллипс




y
b
B_2
$M(x, y)$
A_1
O
A_2
$-a$
$F_1(-c, 0)$
$F_2(0, c)$
a
x
$-b$
B_1

Эллипс



y
b
B_2
$M(x,y)$
N_1
N_2
A_1
O
A_2
$-a$
$F_1(-c,0)$
$F_2(0,c)$
a
x
$x=-a/\varepsilon$
$-b$
B_1
$x=a/\varepsilon$

Точка $O(0,0)$ называется **центром эллипса**, точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - **вершины эллипса**.

Точка $O(0,0)$ называется **центром эллипса**, точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - **вершины эллипса**. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются **большой и малой осями эллипса**, причем их длины $|A_1A_2| = 2a$ и $|B_1B_2| = 2b$.

Точка $O(0,0)$ называется **центром эллипса**, точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - **вершины эллипса**.
Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются **большой и малой осями эллипса**, причем их длины $|A_1A_2| = 2a$ и $|B_1B_2| = 2b$.
Числа a и b называют **большой и малой полуосями эллипса**.

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**,

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**,
c - **полуфокусное расстояние**,

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**,
c - **полуфокусное расстояние**,
ось, на которой лежат фокусы, – **фокальная ось эллипса**.

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, его возможные значения: $0 \leq \varepsilon < 1$.

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, его возможные значения: $0 \leq \varepsilon < 1$. Когда $\varepsilon = 0$ ($b = a$), эллипс становится окружностью.

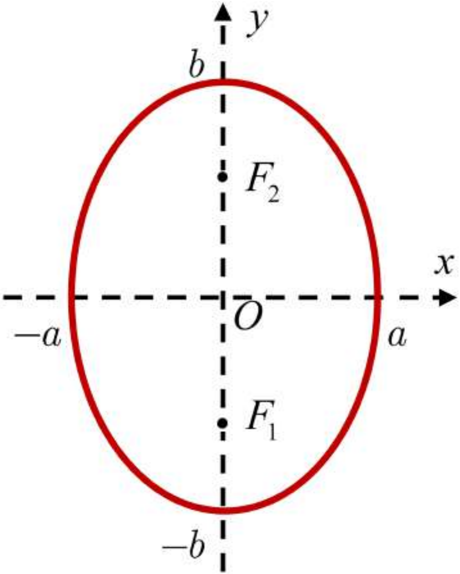
Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, его возможные значения: $0 \leq \varepsilon < 1$. Когда $\varepsilon = 0$ $(b = a)$, эллипс становится окружностью. Чем больше ε, тем более сплющенным будет эллипс.

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами эллипса** и обладают свойством:

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами эллипса** и обладают свойством: отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е. $|MF_1|/|MN_1| = \varepsilon$, $|MF_2|/|MN_2| = \varepsilon$.

Если фокусы эллипса $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ - на оси Ox, $a < b$ и $b^2 - c^2 = a^2$, $\varepsilon = c/b$. Уравнение эллипса не меняется.

Эллипс



К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также

К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также

мнимый эллипс - $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также

мнимый эллипс - $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

и **точка** - $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

Гипербола

Определение

Гиперболой называется геометрическое место всех точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, по модулю меньшая, чем расстояние между фокусами.

Гипербола

Расположим фокусы гиперболы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$.

Гипербола

Расположим фокусы гиперболы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Расположим фокусы гиперболы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы,

Гипербола

Расположим фокусы гиперболы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы, $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$ и по определению гиперболы $2a < 2c$.

Гипербола

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

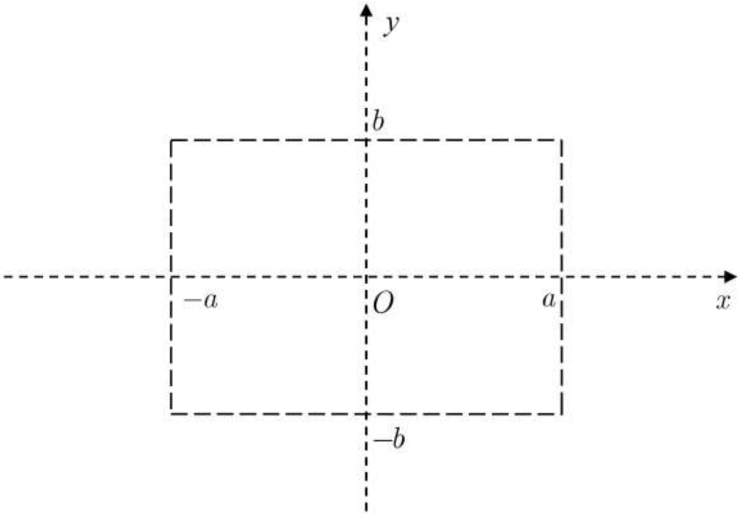
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим **каноническое уравнение гиперболы**

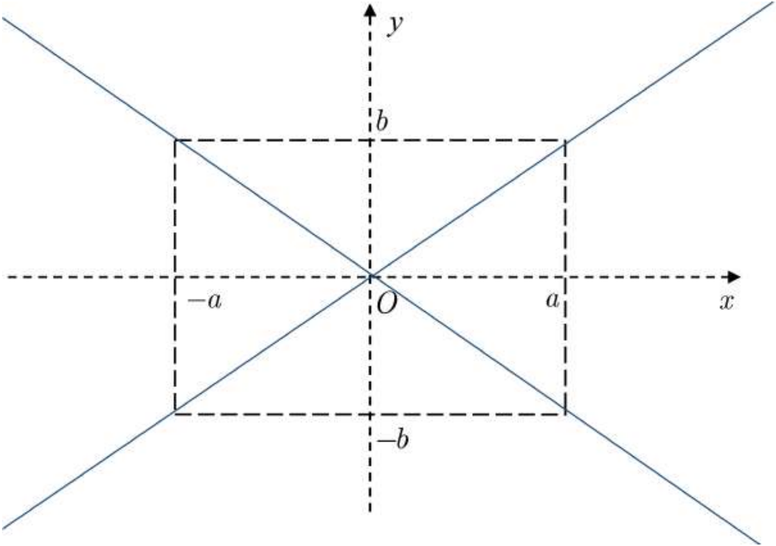
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

где $a^2+b^2=c^2$.

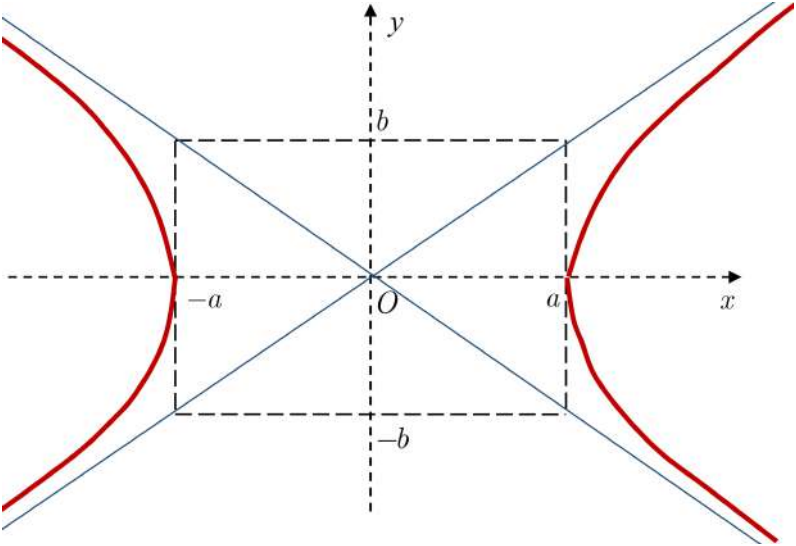
Гипербола



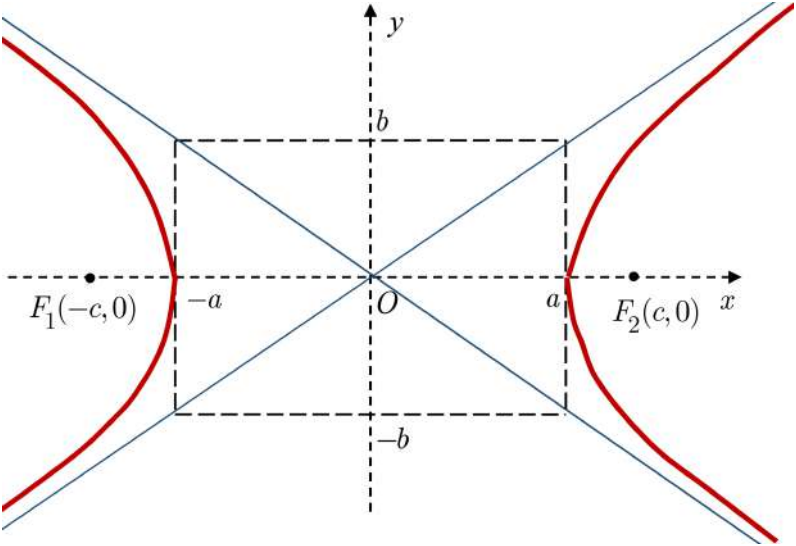
Гипербола



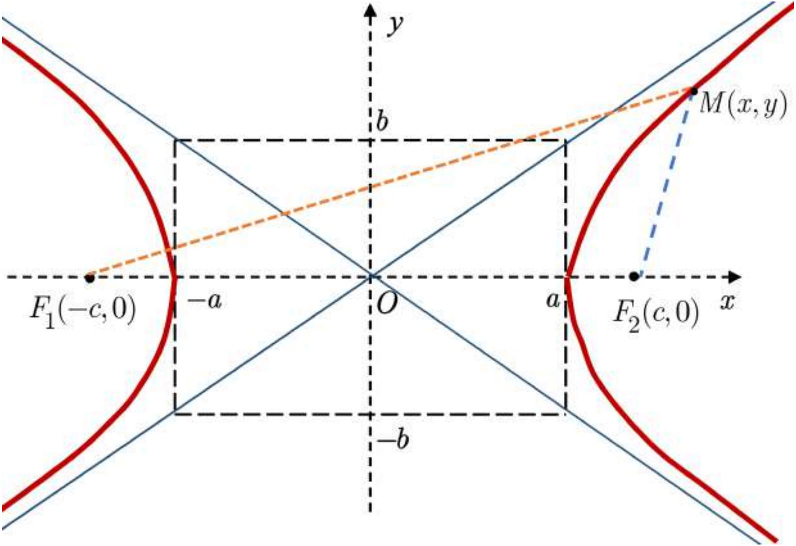
Гипербола



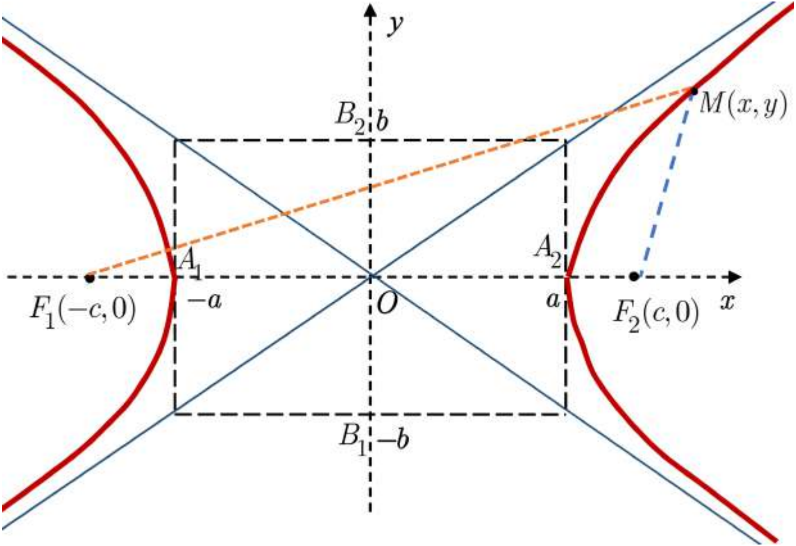
Гипербола



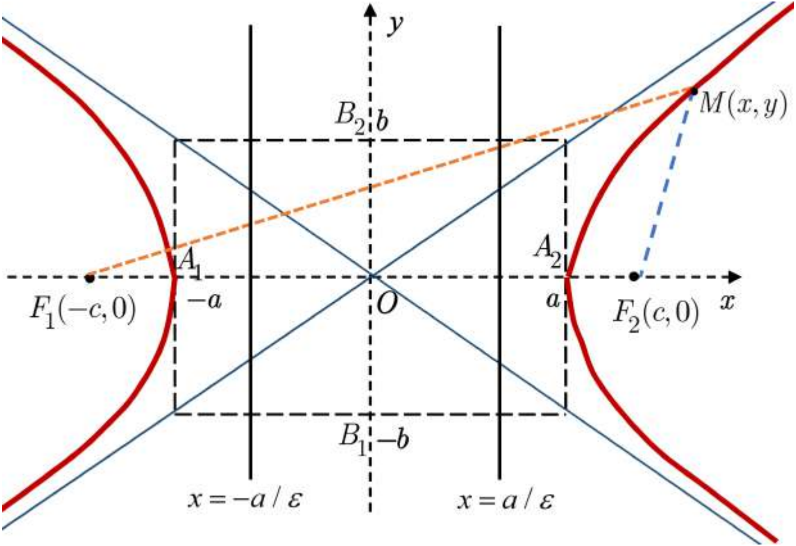
Гипербола



Гипербола



Гипербола



y
$M(x, y)$
B_2 b
A_1
A_2
$F_1(-c, 0)$
$-a$
O
a
$F_2(c, 0)$
x
B_1 $-b$
$x = -a / \varepsilon$
$x = a / \varepsilon$

Точка $O(0,0)$ называется **центром гиперболы**, точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ - **вершины гиперболы**. Ось Oy гипербола не пересекает.

Точка $O(0,0)$ называется **центром гиперболы**, точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ - **вершины гиперболы**. Ось Oy гипербола не пересекает.

Поэтому отрезок A_1A_2 называют **действительной осью гиперболы**, отрезок B_1B_2 -**мнимой осью гиперболы**, причем их длины $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2| = 2b$.

Точка $O(0,0)$ называется **центром гиперболы**, точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ - **вершины гиперболы**. Ось Oy гипербола не пересекает.

Поэтому отрезок A_1A_2 называют **действительной осью гиперболы**, отрезок B_1B_2 -**мнимой осью гиперболы**, причем их длины $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2| = 2b$.

Числа a и b - **действительная и мнимая полуоси гиперболы**.

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называют **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**,

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называют **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**,
c - **полуфокусное расстояние**,

Гипербола

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называют **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**,
c - **полуфокусное расстояние**,
ось, на которой лежат фокусы - **фокальная ось гиперболы**.

Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называют **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**,

c - **полуфокусное расстояние**,

ось, на которой лежат фокусы - **фокальная ось гиперболы**.

Фокусы всегда лежат на действительной оси.

Гипербола

При неограниченном удалении точек гиперболы от начала координат они неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, т.е. к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$, которые являются **асимптотами гиперболы**.

Гипербола

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**, его возможные значения: $1 < \varepsilon < \infty$.

Гипербола

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы** и обладают тем же свойством, что и у эллипса:

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы** и обладают тем же свойством, что и у эллипса: отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
описывает **сопряженную гиперболу**.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

описывает **сопряженную гиперболу**. Действительная и мнимая оси обычной гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие.

Гипербола

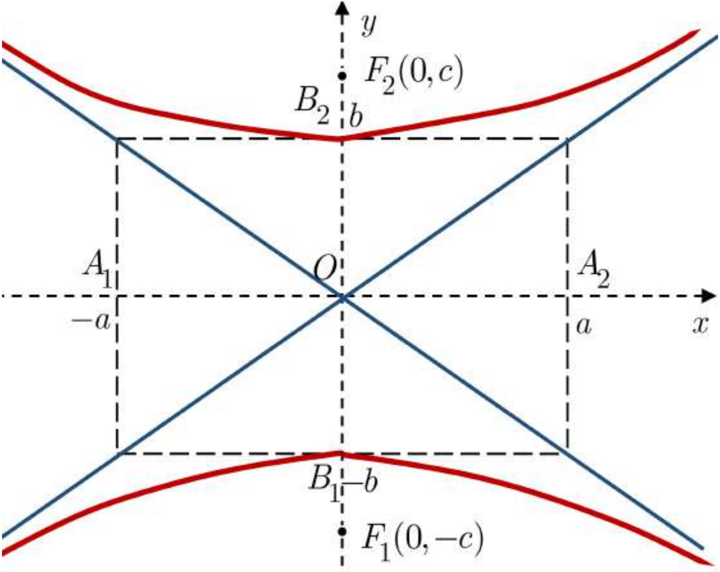
Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy,

Гипербола

Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, эксцентриситет - $\varepsilon = c/b$,

Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy,
эксцентриситет - $\varepsilon = c/b$,
уравнения директрис - $y = \pm b/\varepsilon$.

Гипербола



Гипербола

Если полуоси гиперболы равны ($a = b$), то гипербола называется **равносторонней**. Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Гипербола

К кривым второго порядка гиперболического типа относится также **пара пересекающихся прямых**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Парабола

Парабола

Определение

Параболой называется геометрическое место всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается через p $(p > 0)$.

Парабола

Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой.

Парабола

Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой. Тогда имеем фокус $F(p/2, 0)$ и уравнение директрисы $x = -p/2$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы.

Парабола

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда по определению $|MF| = |MN|$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда по определению $|MF| = |MN|$. Откуда получаем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

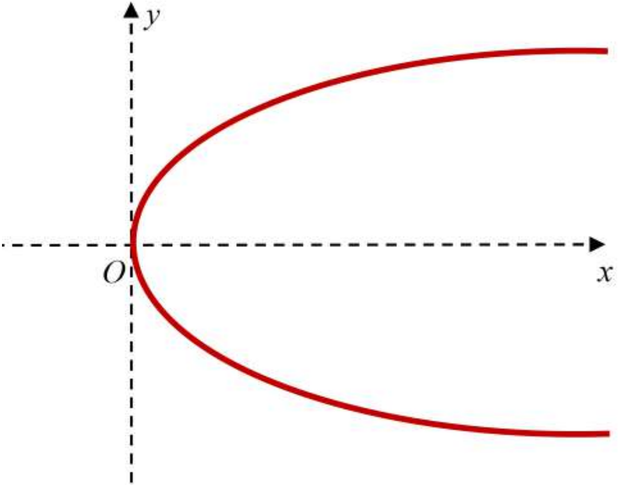
Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда по определению $|MF| = |MN|$. Откуда получаем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

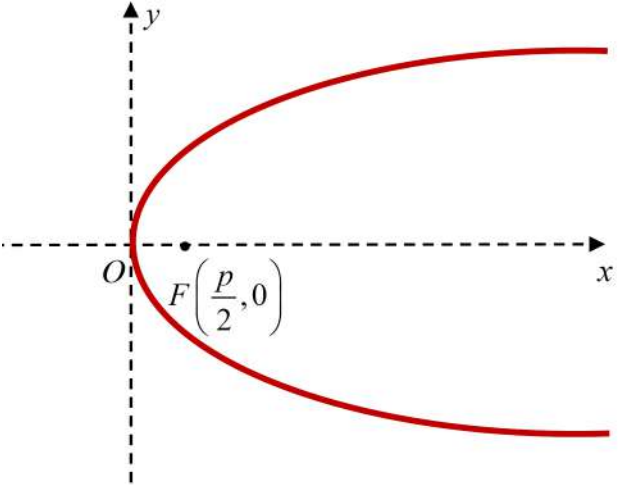
После возведения обеих частей в квадрат получим **каноническое уравнение параболы**

$$y^2 = 2px. \qquad (3)$$

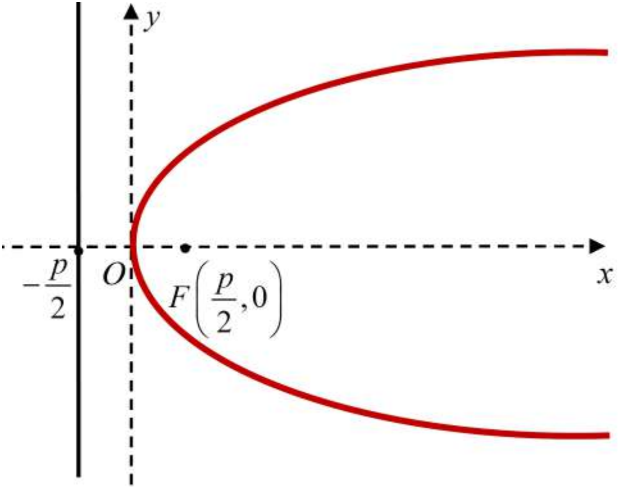
Парабола



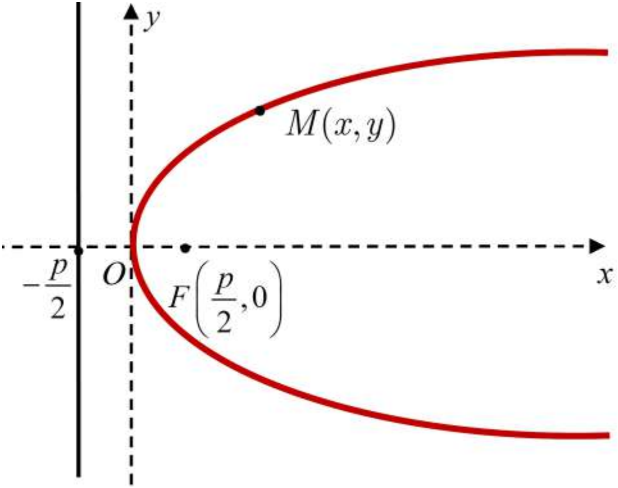
Парабола



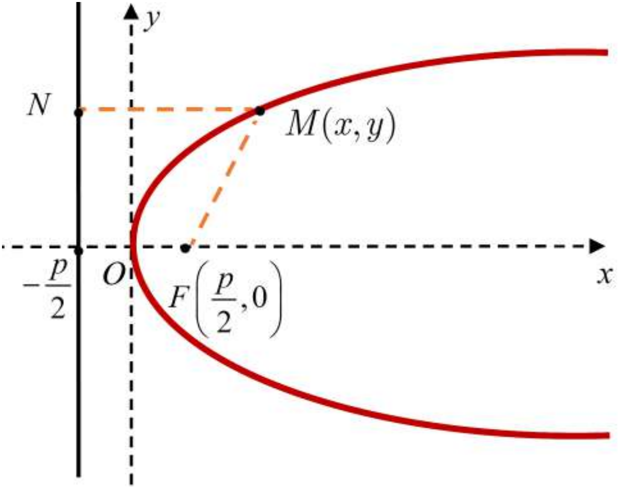
Парабола



Парабола



Парабола



Парабола

Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$.

Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$.

Парабола проходит через начало координат.

Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$.
Парабола проходит через начало координат.
Точку $O(0, 0)$ называют **вершиной параболы**,

Парабола

Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$.
Парабола проходит через начало координат.
Точку $O(0,0)$ называют **вершиной параболы**, величину $|FM| = r$ – **фокальным радиусом точки** M.

Парабола

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

Парабола

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

$(y - y_0)^2 = 0$ - **пара совпадающих прямых**,

К кривым второго порядка параболического типа относятся также

$(y - y_0)^2 = 0$ - **пара совпадающих прямых**,

$y^2 = c^2$ - **пара параллельных прямых**,

К кривым второго порядка параболического типа относятся также
$(y - y_0)^2 = 0$ - **пара совпадающих прямых**,
$y^2 = c^2$ - **пара параллельных прямых**,
$y^2 = -c^2$ - **пара мнимых параллельных прямых.**