Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Текст 2.3

Аннотация

Поверхности второго порядка. Общее уравнение поверхности второго порядка. Канонические уравнения и вид поверхностей: эллипсоид, однополостной гиперболоид, двуполостной гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Цилиндрические поверхности, конические поверхности.

1 Поверхности второго порядка

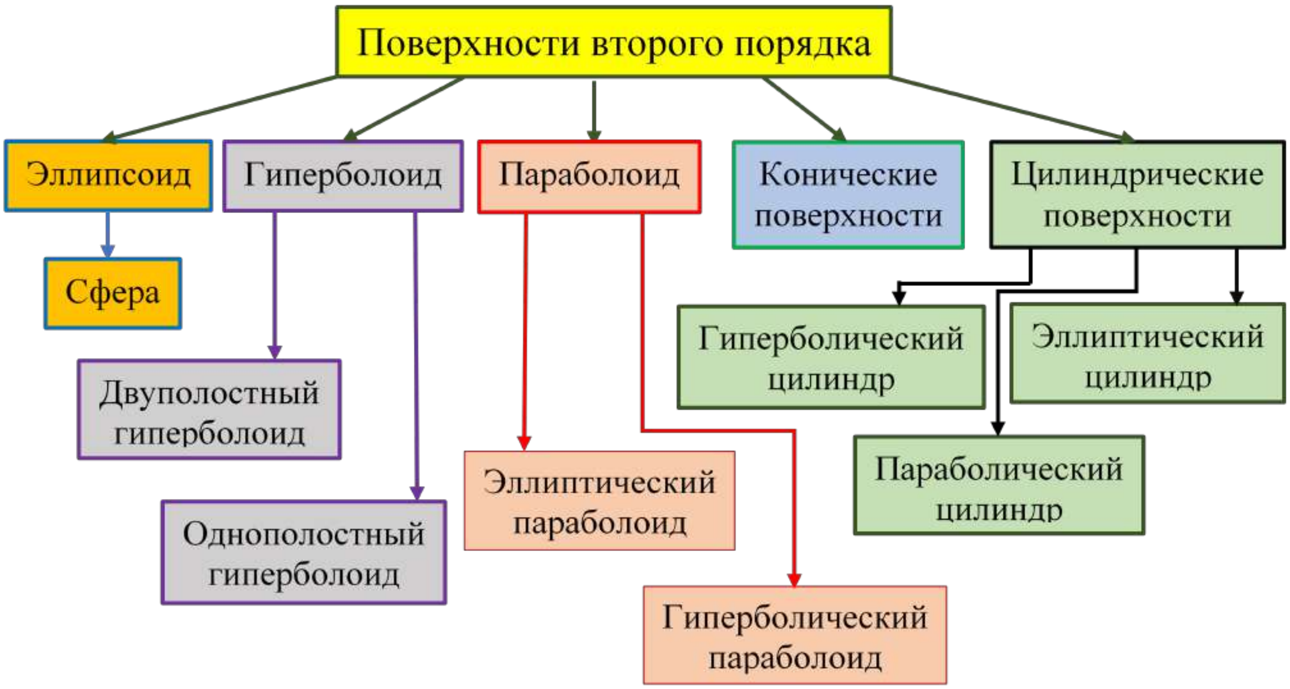
Определение

Поверхностью второго порядка называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени от трех переменных

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = 0,$$

называемым **общим уравнением поверхности второго порядка**. Коэффициенты этого уравнения – действительные числа, по крайней мере одно из них отлично от нуля.

К поверхностям второго порядка относятся: сфера, эллипсоид, гиперболоид, конусы, параболоиды и цилиндры.



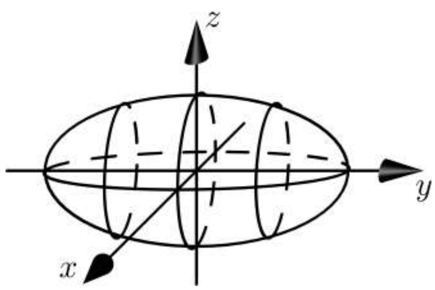
2 Эллипсоид

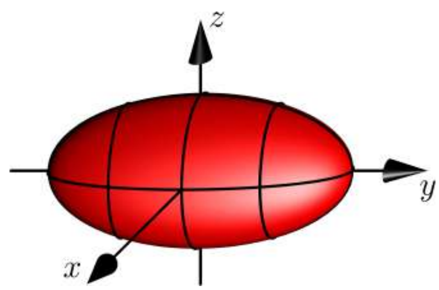
Определение

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ - параметры (полуоси) эллипсоида.





Если полуоси a, b, c различны, то эллипсоид называется **трехосным**; если какие-либо две полуоси равны – **эллипсоидом вращения**; если все три полуоси равны, то получается **сфера** .

Геометрические свойства эллипсоида:

1. Сечения эллипсоида плоскостями $x = h$, $y = h$ или $z = h$ есть эллипсы.

2. Эллипсоид целиком расположен в параллелепипеде с центром в точке $O(0, 0, 0)$, с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, равными $2a$, $2b$ и $2c$.

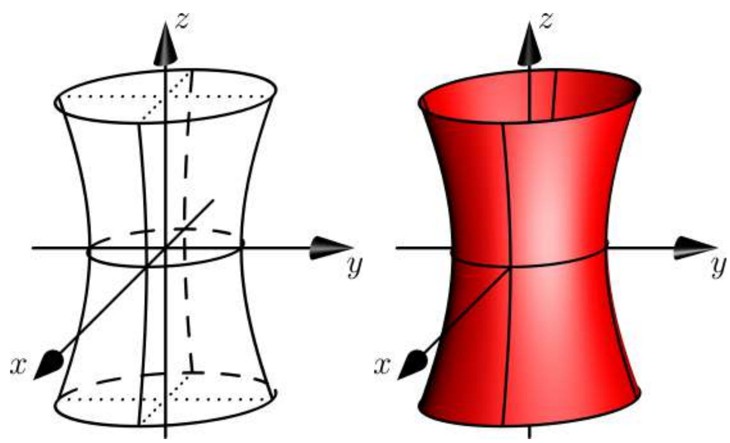
Уравнение мнимого эллипсоида:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$
Эта поверхность не имеет ни одной вещественной точки.

3 Гиперболоиды

3.1 Однополостный гиперболоид

Определение

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
где $a > 0, b > 0, c > 0$.



Геометрические свойства однополостного гиперболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу. Эллипс получающийся при $h = 0$, называется **горловым эллипсом** гиперболоида.

2. Вертикальные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают гиперболоид по гиперболам.

3. Ось Oz называется **продольной осью** гиперболоида, оси Ox и Oy называются **поперечными осями** гиперболоида.

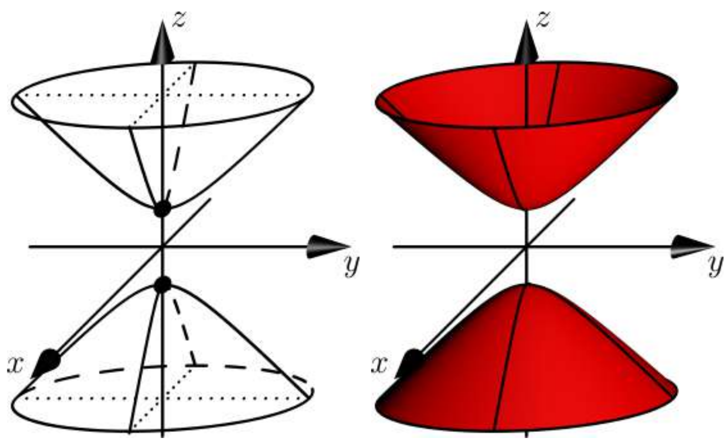
3.2 Двуполостный гиперболоид

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a > 0, b > 0, c > 0$.



Геометрические свойства двуполостного гиперболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с гиперболоидом ($(0, 0, c)$ при $h = c$ и $(0, 0, -c)$ при $h = -c$). При $|h| > c$ плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу.

2. Вертикальные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают гиперболоид по гиперболам, у которых действительной осью является ось Oz.

3. Поверхность состоит из двух симметричных полостей, имеющих форму неограниченных чаш, расположенных в полупространствах $z \geq c$ и $z \leq -c$.

4. Ось Oz называется **продольной осью** гиперболоида, оси Ox и Oy называются **поперечными осями** гиперболоида.

4 Параболоиды

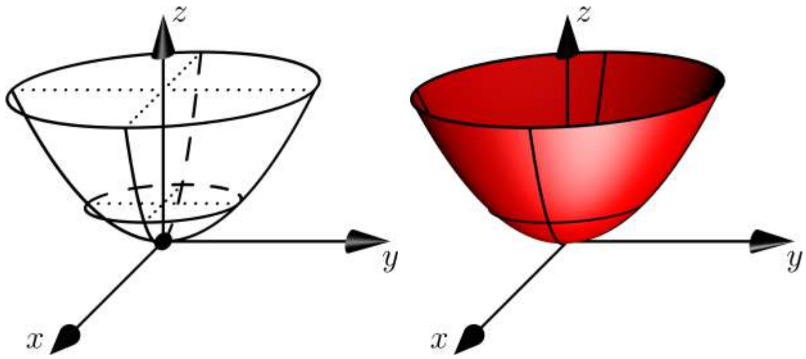
4.1 Эллиптический параболоид

Определение

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

где $a > 0, b > 0$.



Геометрические свойства эллиптического параболоида:

1. Каждая плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид, при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку $O(0, 0, 0)$, при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу.

2. Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают параболоид по параболам.

3. Поверхность состоит из одной полости, имеющей форму неограниченной чаши, расположенной в полупространстве $z \geq 0$.

4. Ось Oz называется осью эллиптического параболоида, точка $O(0, 0, 0)$ - его вершиной.

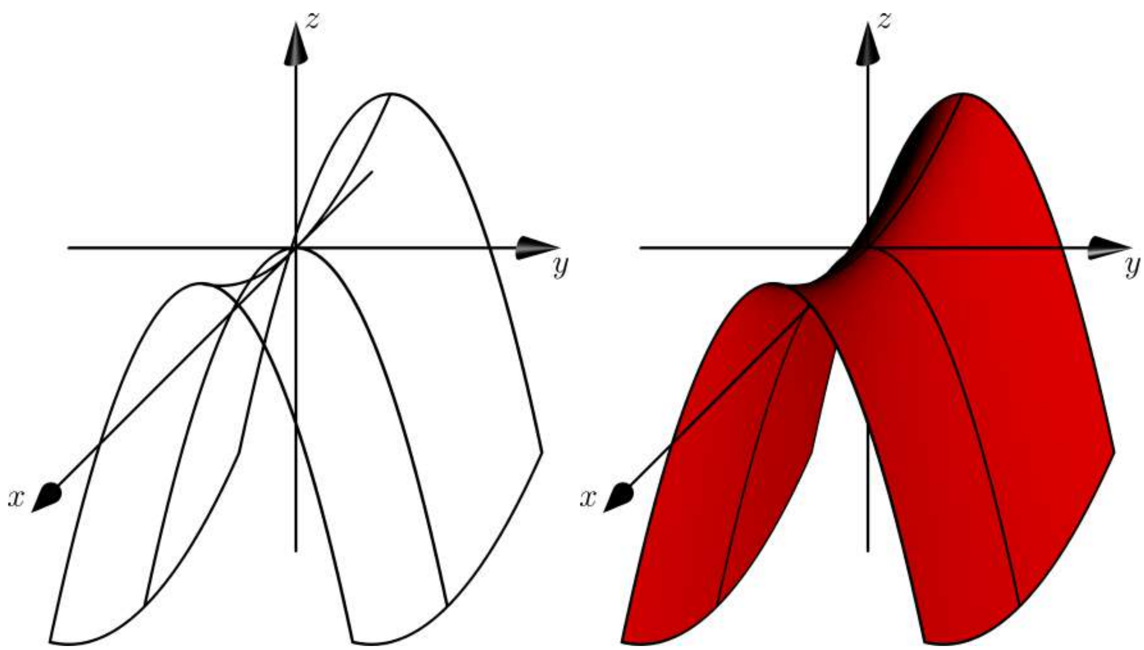
4.2 Гиперболический параболоид

Определение

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

где $a > 0, b > 0$.



Геометрические свойства гиперболического параболоида:

1. Каждая плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси Oy, а мнимая – оси Ox. При $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси Ox, а мнимая – оси Oy. Плоскость $z = 0$ пересекает параболоид по паре прямых

2. Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид по параболам.

3. Поверхность имеет вид седла и может быть получена движением параболы, при условии, что эта парабола все время остается в плоскости, перпендикулярной к одной из осей координат, причем ось параболы не меняет своего направления, а вершина скользит по другой параболе.

5 Конус второго порядка

Определение

Коническая поверхность - это поверхность, образованная прямыми (прямолинейными образующими), проходящими через одну точку, называемую вершиной конуса.

Определение

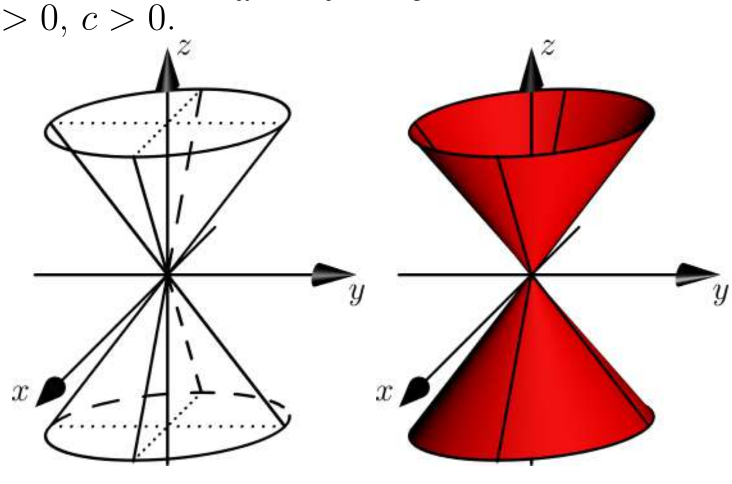
Направляющая конической поверхности - это произвольно расположенная на ней линия, обладающая тем свойством, что любая прямолинейная образующая пересекает ее в одной и только одной точке.

Определение

Эллиптическим конусом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.



Геометрические свойства конуса:

1. Сечение эллиптического конуса плоскостью $z = h$ при $h \neq 0$ представляет собой эллипс. Прямая проходящая через центры этих

эллипсов, называется **осью конуса**. Сечение конуса плоскостью $z = 0$ состоит из одной точки $O(0, 0, 0)$.

2. Сечения конуса плоскостями $x = h$ и $y = h$, $h \neq 0$ являются гиперболами.

3. Сечения конуса плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ представляют собой пары пересекающихся прямых.

4. Рассматривая сечения конуса плоскостями, не перпендикулярными осям Ox или Oy можем получить параболу.

5. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq 0$.

6 Цилиндрические поверхности

Определение

Цилиндрическая поверхность – это поверхность, которую описывает прямая (**образующая**), которая, оставаясь параллельно самой себе, движется вдоль некоторой кривой, называемой **направляющей**. По названию направляющей получают свое название и цилиндры.

Если образующая параллельна какой-либо оси координат, то каноническое уравнение цилиндра не содержит в уравнении соответствующую переменную. В этом случае уравнение цилиндра повторяет уравнение своей направляющей.

Для построения цилиндра нужно построить направляющую в той плоскости, в которой она задана, а затем «тянуть» эту линию вдоль той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

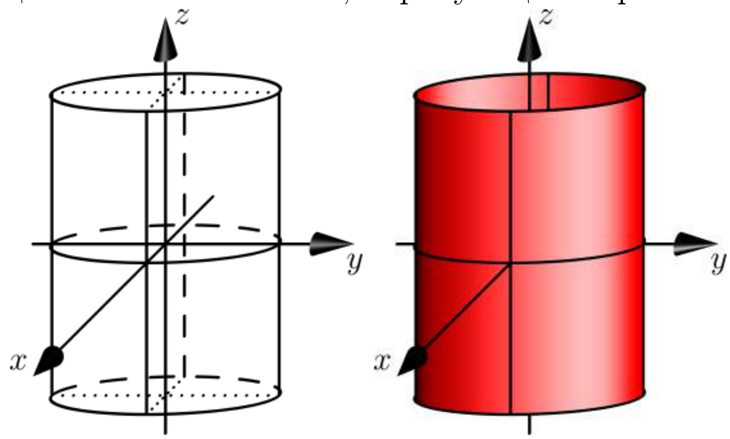
Признак уравнения цилиндрической поверхности: в уравнении отсутствует одна из трех переменных.

Вариантов различных уравнений цилиндров достаточно много. Рассмотрим те из них, к которым приводят канонические уравнения кривых второго порядка (считаем, что $a > 0, b > 0, p > 0$):

- **эллиптический цилиндр** с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

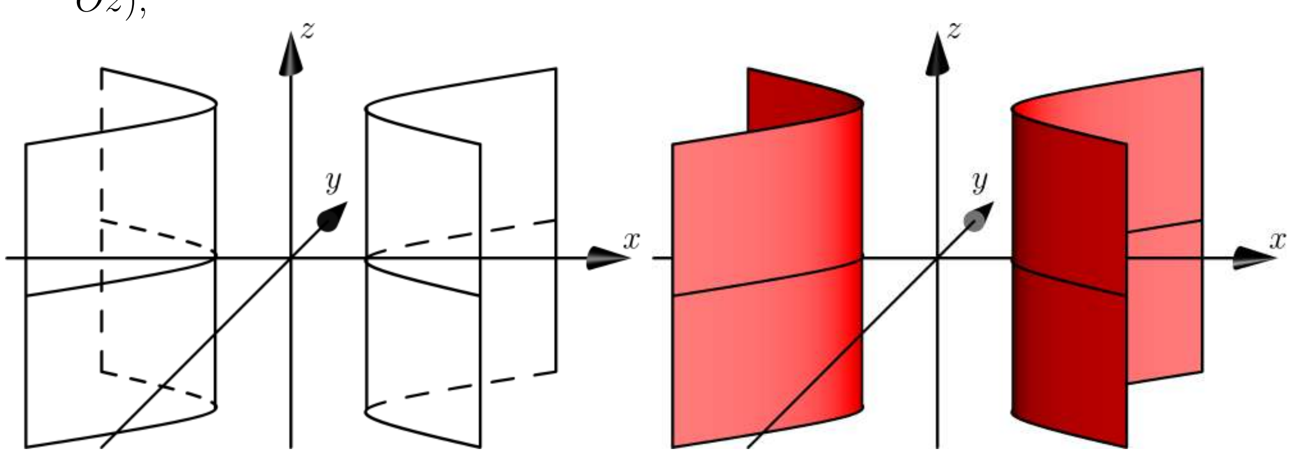
(направляющей является эллипс, образующая параллельна оси Oz);



- **гиперболический цилиндр** с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

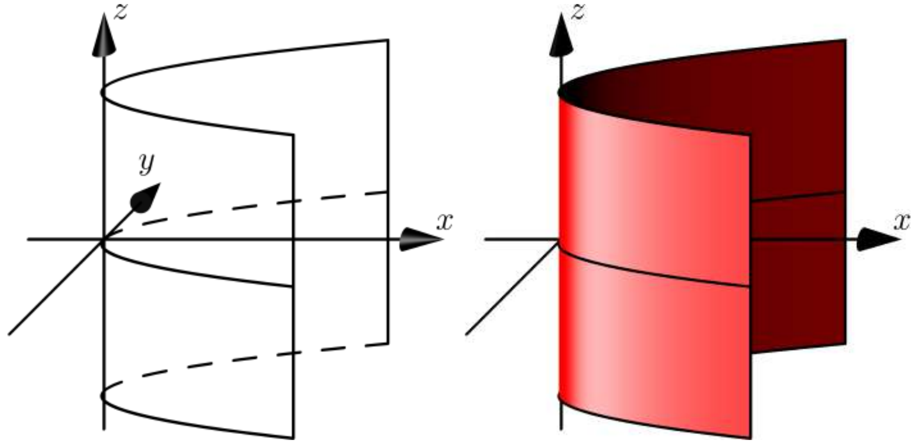
(направляющей является гипербола, образующая параллельна оси Oz);



- **параболический цилиндр** с каноническим уравнением

$$y^2 = 2px$$

(направляющей является парабола, образующая параллельна оси Oz).



Отметим, что если направляющей является пара пересекающихся (параллельных, совпадающих) прямых, то соответствующая им цилиндрическая поверхность представляет собой пару пересекающихся (параллельных, совпадающих) плоскостей:

- Уравнение **пары пересекающихся плоскостей**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

- Уравнение **пары параллельных плоскостей**

$$y^2 = a^2.$$

- Уравнение **пары мнимых параллельных плоскостей**

$$y^2 = -a^2.$$

- Уравнение **пары совпадающих плоскостей**

$$y^2 = 0.$$