Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Аналитическая геометрия

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Уравнение плоскости
с заданным нормальным вектором

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π.

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен этой плоскости.

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$,

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором

Произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0.$$

Отсюда получаем **уравнение плоскости с заданным нормальным вектором**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

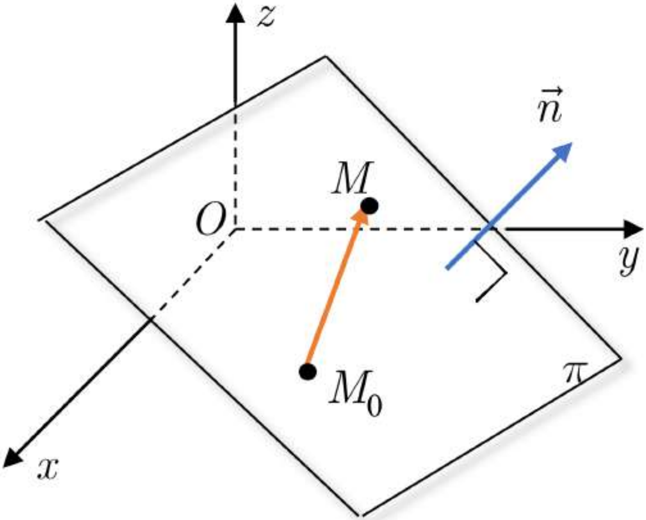
Уравнение плоскости
с заданным нормальным вектором

Отсюда получаем **уравнение плоскости с заданным нормальным вектором**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Определение
Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называют **нормальным вектором плоскости**.

Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором



Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить **общее уравнение плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2)$$

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.
2. Если $A = 0$, то плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.
2. Если $A = 0$, то плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.
3. Если $A = D = 0$, то плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox.

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

4. Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

4. Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости Oxy.

5. Если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$ плоскости Oxy.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости π, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

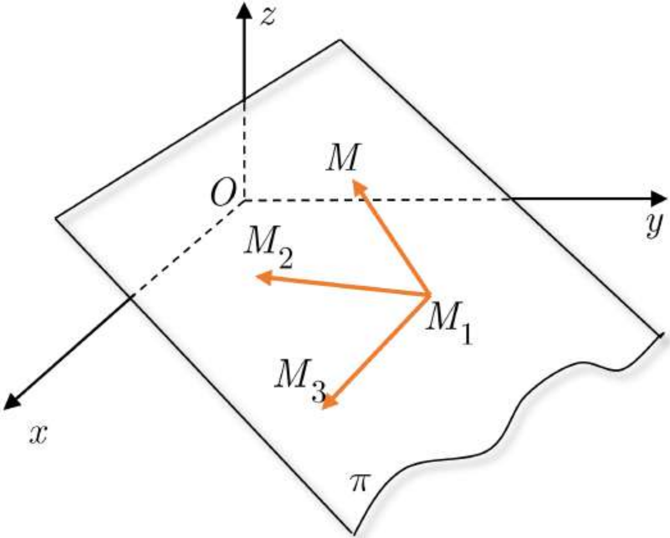
Пусть произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости π. Составим векторы:

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны,

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Записав это условие в координатной форме, получим **уравнение плоскости, проходящей через три точки**:

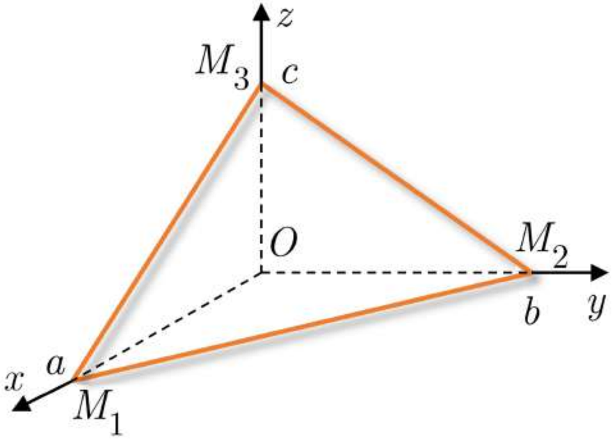
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz отрезки a, b и c, т.е. проходит через три точки $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$.

Уравнение плоскости в отрезках



Уравнение плоскости в отрезках

Подставим координаты этих точек в уравнение (3) и раскроим определитель.

Уравнение плоскости в отрезках

Подставим координаты этих точек в уравнение (3) и раскроим определитель. Получим **уравнение плоскости в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{4}$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями:

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Тогда

Тогда

а) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

Взаимное расположение двух плоскостей

Тогда

а) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются по прямой, уравнением которой служит система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Определение

Под **углом** φ **между плоскостями** π_1 и π_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

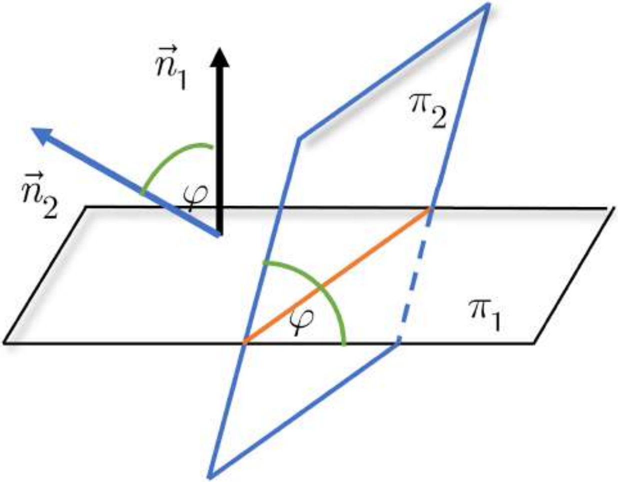
Взаимное расположение двух плоскостей

Угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей π_1 и π_2 равен одному из таких углов.

Угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей π_1 и π_2 равен одному из таких углов. Поэтому

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1\ \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \qquad (5)$$

Взаимное расположение двух плоскостей



Условие параллельности плоскостей:

Взаимное расположение двух плоскостей

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

Взаимное расположение двух плоскостей

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1 || \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пусть плоскость π задана общим уравнением
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
Выберем для плоскости единичный нормальный вектор
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$$
с началом в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

Тогда расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

Тогда расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1}|$$

Расстояние от точки до плоскости

Тогда расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}| =$$

Тогда расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}| =$$

$$= \left|\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| =$$

Расстояние от точки до плоскости

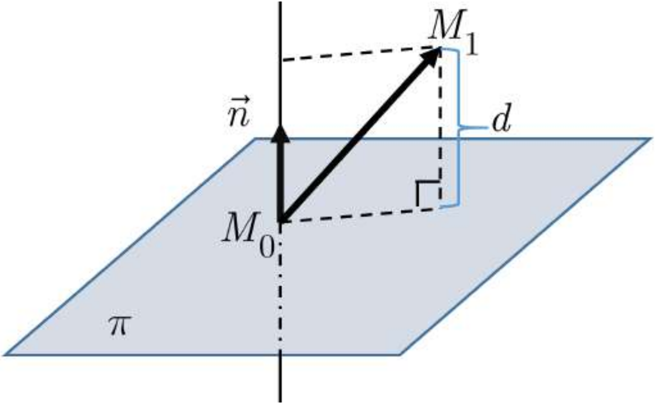
Тогда расстояние d от произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π есть

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}| =$$

$$= \left|\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Расстояние от точки до плоскости



Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$\Downarrow$$

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

Расстояние от точки до плоскости

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6)$$