Аналитическая геометрия
Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
Лекция 2.2

Аннотация

Линии второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола. Определение, общие характеристики. Каноническое уравнение, исследование формы. Эксцентриситет, директрисы. Общее уравнение кривой.

1 Линии второго порядка

Определение

Алгебраической линией (кривой) второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

По крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Это уравнение определяет на плоскости эллипс, гиперболу или параболу. В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Если кривая имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных осей, или имеет вершину в начале координат и пр.), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется **каноническим**.

2 Эллипс

Определение

Эллипсом называется геометрическое место всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Расположим фокусы эллипса F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка эллипса, $|MF_1|+|MF_2| = 2a$ и по определению эллипса $2a > 2c$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

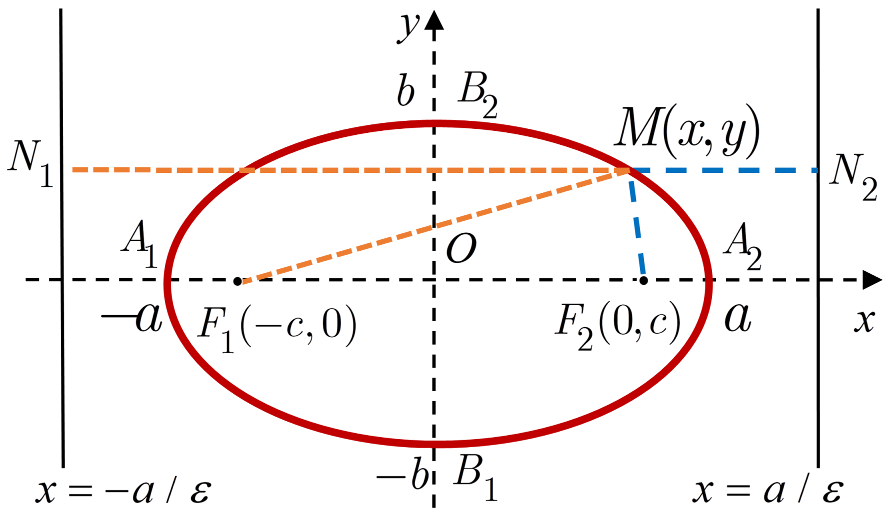
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Второе слагаемое в левой части равенства перенесем в правую часть и возведем обе части в квадрат. Получим

$$a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx.$$

Далее возведем обе части этого равенства в квадрат и разделим полученное равенство на $a^2(a^2-c^2)$. Полагая $a^2-c^2=b^2$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

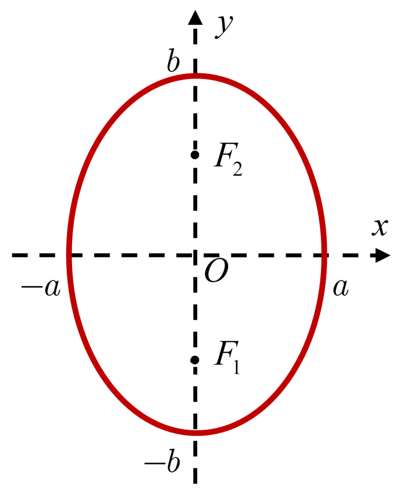


Точка $O(0,0)$ называется **центром эллипса**, точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ - **вершины эллипса**. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются **большой и малой осями эллипса**, причем их длины $|A_1A_2| = 2a$ и $|B_1B_2| = 2b$. Числа a и b называют **большой и малой полуосями эллипса**. Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называется **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса**, c - **полуфокусное расстояние**, а ось, на которой лежат фокусы, – **фокальная ось эллипса**.

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом эллипса**, его возможные значения: $0 \le \varepsilon < 1$. Когда $\varepsilon = 0$ $(b = a)$, эллипс становится окружностью. Чем больше ε, тем более сплющенным будет эллипс.

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами эллипса** и обладают свойством: отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е. $|MF_1|/|MN_1| = \varepsilon$, $|MF_2|/|MN_2| = \varepsilon$.

Если фокусы эллипса $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ расположены на оси Oy, то большая ось эллипса длиной $2b$ лежит на оси Oy, малая ось длиной $2a$ - на оси Ox, $a < b$ и $b^2 - c^2 = a^2$, $\varepsilon = c/b$. Уравнение эллипса не меняется.



К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также **мнимый эллипс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

и **точка**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

3 Гипербола

Определение

Гиперболой называется геометрическое место всех точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, по модулю меньшая, чем расстояние между фокусами.

Расположим фокусы гиперболы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy и обозначим расстояние между ними $|F_1F_2| = 2c$. Тогда имеем $F_1(-c, 0),\ F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка гиперболы, $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$ и по определению гиперболы $2a < 2c$.

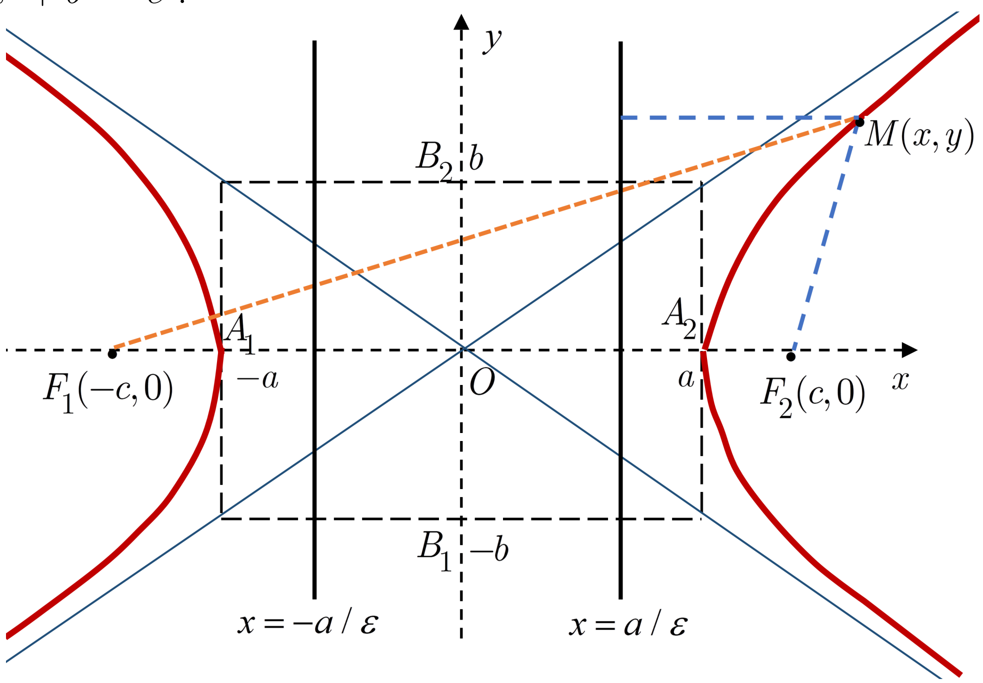
Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим **каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

где $a^2+b^2=c^2$.

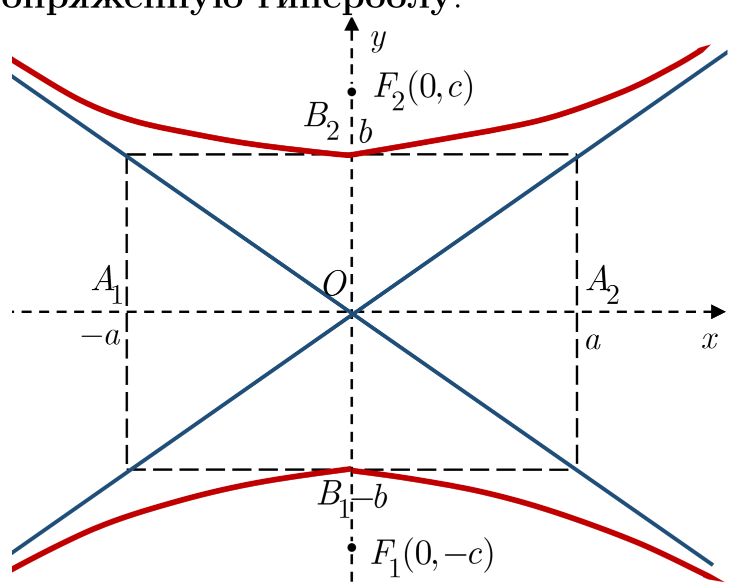


Точка $O(0,0)$ называется **центром гиперболы**, точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ - **вершины гиперболы**. Ось Oy гипербола не пересекает. Поэтому отрезок A_1A_2 называют **действительной осью гиперболы**, отрезок B_1B_2 -**мнимой осью гиперболы**, причем их длины $|A_1A_2|=2a$, $|B_1B_2|=2b$. Числа a и b - **действительная и мнимая полуоси гиперболы**. Расстояние $|F_1F_2|=2c$ называют **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы**, c - **полуфокусное расстояние**, а ось, на которой лежат фокусы - **фокальная ось гиперболы**. Фокусы всегда лежат на действительной оси.

При неограниченном удалении точек гиперболы от начала координат они неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, т.е. к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$, которые являются **асимптотами гиперболы**.

Число $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом гиперболы**, его возможные значения: $1 < \varepsilon < \infty$. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются **директрисами гиперболы** и обладают тем же свойством, что и у эллипса: отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к аналогичному расстоянию до директрисы, лежащей по ту же сторону от центра O, что и фокус, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
описывает **сопряженную гиперболу**.



Действительная и мнимая оси обычной гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие. Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ расположены на оси Oy, эксцентриситет - $\varepsilon = c/b$, уравнения директрис - $y = \pm b/\varepsilon$.

Если полуоси гиперболы равны ($a = b$), то гипербола называется **равносторонней**. Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2$$

К кривым второго порядка гиперболического типа относится также **пара пересекающихся прямых**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

4 Парабола

Определение

Параболой называется геометрическое место всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается через p ($p > 0$).

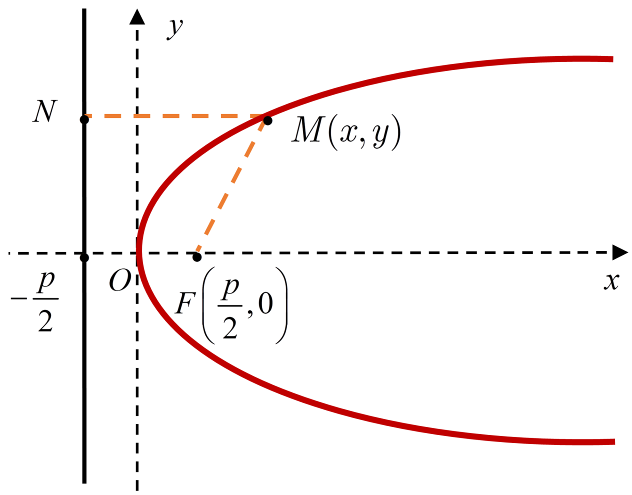
Расположим фокус параболы F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой. Тогда имеем фокус $F(p/2, 0)$ и уравнение директрисы $x = -p/2$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда по определению $|MF| = |MN|$. Откуда получаем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

После возведения обеих частей в квадрат получим **каноническое уравнение параболы**

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$



Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$.

Парабола проходит через начало координат. Точку $O(0,0)$ называют **вершиной параболы**, величину $|FM| = r$ – **фокальным радиусом точки** M.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы

К кривым второго порядка параболического типа относятся также $(y - y_0)^2 = 0$ - **пара совпадающих прямых**, $y^2 = c^2$ - **пара параллельных прямых**, $y^2 = -c^2$ - **пара мнимых параллельных прямых.**

